

Révisions pour préparer l'option "mathématiques complémentaires"

Dans les pages qui suivent, vous trouverez des liens internet et des exercices qui vous permettront de réviser des notions du programme de première dont vous allez avoir besoin en terminale.

L'objectif est que vous ne soyez pas bloqués sur les notions nouvelles à cause de lacunes anciennes.

Ces notions correspondent principalement aux cinq chapitres suivants :

- I. Second degré*
- II. Dérivation et applications*
- III. Suites numériques*
- IV. Fonction exponentielle*
- V. Probabilités*

- *Vous trouverez des liens en rouge vers des vidéos d'Yvan Monka qui pourront vous aider si vous ne réussissez pas à faire les exercices.*
- *Si vous bloquez sur un exercice, commencez par regarder la (les) vidéo(s) proposée(s) puis réessayez sans regarder le corrigé et pour finir, vérifiez vos réponses avec le corrigé. Vous contenter de lire les corrigés sans avoir cherché les exercices au préalable est peu efficace...*
- *Vous pouvez également, pour chaque partie ou à la fin de vos révisions, faire les QCM en ligne. Il n'est pas nécessaire de traiter des questions qui ne correspondent pas aux 5 chapitres à revoir.*
- *Chaque chapitre correspond à 2-3h de travail.*
- *Il est plutôt conseillé de faire ce travail à partir de mi-août.*
- *Au cours de la première quinzaine du mois de septembre, chaque professeur de mathématiques fera passer dans ses classes un contrôle sur ces connaissances. Ce questionnaire permettra d'évaluer vos compétences dans les domaines révisés.*

I - Second degré

Exercice 1 : <https://www.youtube.com/watch?v=youUIZ-wsYk&feature=youtu.be>

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $2x^2 + 5x - 7 = 0$

2. $25x^2 + 30x + 9 = 0$

3. $3x^2 + x + 5 = 2x^2 + 4$

Exercice 2 : <https://www.youtube.com/watch?v=sFNW9KVSTMY&feature=youtu.be>

<https://www.youtube.com/watch?v=pT4xtI2Yg2Q&feature=youtu.be>

<https://www.youtube.com/watch?v=89qx7KTCCdg&feature=youtu.be>

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $-2x^2 + 5x - 3 \leq 0$

2. $\frac{5x^2 - 4x + 12}{5 - 3x} > 0$

3. $\frac{2x^2 - 12x - 17}{4 - x} \leq 1$

Exercice 3 : <https://www.youtube.com/watch?v=EyxP5HIfyF4&feature=youtu.be>

Soit les paraboles C_f et C_g représentant les fonctions du second degré f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x$ et $g(x) = -2x^2 - 3x + 2$.

Déterminer les positions relatives de C_f et C_g .

QCM : <http://maths-master.fr/liste-qcm-e3c-premiere-generale-maths/> (« second degré »)

II - Dérivation et applications

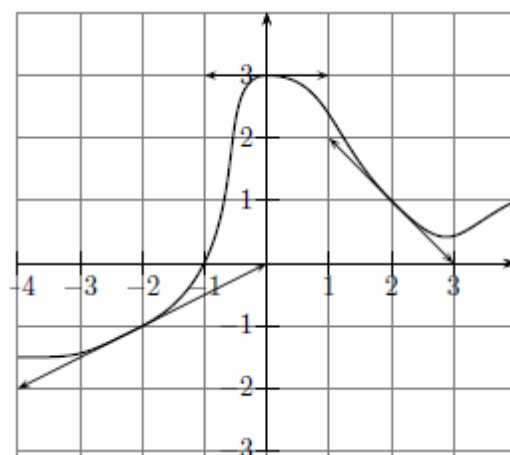
Exercice 1 : <https://www.youtube.com/watch?v=0jhxK55jONs&feature=youtu.be>

f est une fonction dérivable sur $[-4 ; 4]$ dont on donne la courbe représentative C ci-dessous, ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses -2 ; 0 et 2 :

1. Déterminer graphiquement les images de -2 , 0 et 2 par f .

2. Déterminer graphiquement, en justifiant, les nombres dérivés de f en -2 , en 0 et en 2 .

3. Donner une équation de la tangente T_2 à C au point d'abscisse 2 .



Exercice 2 : <https://www.youtube.com/watch?v=9Mann4wOGJA&feature=youtu.be>
<https://www.youtube.com/watch?v=ehHoLK98Ht0&feature=youtu.be>

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la fonction dérivée de la fonction donnée :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 2$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 - 2x + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}$

3. f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = 3 - 8\sqrt{x}$.

4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 8x - 5e^x$.

Exercice 3 : <https://www.youtube.com/watch?v=OMsZNNIIdrw&feature=youtu.be>
https://www.youtube.com/watch?v=-MfEczGz_6Y&feature=youtu.be

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la fonction dérivée de la fonction donnée en utilisant les formules sur les opérations :

1. f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = (4x + 1)\sqrt{x}$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-5x^2 + 3x - 7)^2$

3. f est définie sur $]5 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{8x+3}{x-5}$

4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x - 2)^4$

Exercice 4 : https://www.youtube.com/watch?v=23_Ba3N0fu4&feature=youtu.be

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la fonction dérivée de la fonction donnée et établir le tableau des variations de cette fonction sur son ensemble de définition :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0,5x^3 + 6,75x^2 - 21x + 3$.
2. g est définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 2x - \frac{3}{x}$

Exercice 5 : <https://www.youtube.com/watch?v=zxyKLqnlMIk&feature=youtu.be>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Donner une équation de la tangente T_0 à C au point d'abscisse 0.
4. Tracer C et T_0 à l'écran de la calculatrice sur l'intervalle $[-8; 8]$. Vérifier graphiquement les résultats des questions précédentes.
5. Encadrer $f(x)$ sur $[-4; 4]$ puis sur $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$

QCM : <http://maths-master.fr/liste-qcm-e3c-premiere-generale-maths/> (« dérivation »)

III - Suites numériques

Exercice 1 : https://www.youtube.com/watch?v=Ha_fIVQ7DIE&feature=youtu.be

Calculer les 3 premiers termes de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. (u_n) définie par $u_n = \frac{3n}{n^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2(u_n)^2 + 7$

Exercice 2 : <https://www.youtube.com/watch?v=DFz8LDKCw9Y&feature=youtu.be>

Etudier la monotonie de la suite (u_n) après avoir calculé les 3 premiers termes dans chacun des cas suivants :

1. (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$
2. (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 6n + 1$
3. (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$.

Exercice 3 : <https://www.youtube.com/watch?v=05UHsy9G4M4&feature=youtu.be>

Soit (u_n) la suite arithmétique de 1er terme $u_0 = 8$ et de raison $r = 3$.

1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n .
2. Calculer u_{50} .
3. Déterminer le plus petit entier naturel tel que : $u_n > 1\,000$.
4. Compléter la fonction `seuil` en python ci-contre, qui ne prend pas d'argument et qui renvoie le plus entier naturel n tel que $u_n > 1000$.

```
def seuil() :  
    u=8  
    n=0  
    while ..... :  
        n=.....  
        u=.....  
    return( .. )
```

Exercice 4 : <https://www.youtube.com/watch?v=gUkOjvAiZGA&feature=youtu.be>

Soit (u_n) la suite géométrique de 1er terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

1. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n .
2. Calculer u_9 .
3. Calculer $S = u_0 + u_1 + \dots + u_9$.

QCM : <http://maths-master.fr/liste-qcm-e3c-premiere-generale-maths/> (« suites numériques »)

Exercice 1 : https://www.youtube.com/watch?v=qDFjeFyA_OY&feature=youtu.be
https://www.youtube.com/watch?v=dA73-HT-I_Y&feature=youtu.be
<https://www.youtube.com/watch?v=d28Fb-zBe4Y&feature=youtu.be>

1. Ecrire sous la forme e^a où a est un réel :

a. $e^5 \times e^{-3}$

b. $\frac{e^4}{e^6}$

c. $\frac{(e^3)^2}{e^{-6}}$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a. $e^{3x+1} = e^4$

b. $e^{3x+4} < e$

c. $e^{4x^2} = e^{5x}$

Exercice 2 : <https://www.youtube.com/watch?v=XcMePHk6Ilk&feature=youtu.be>
https://www.youtube.com/watch?v=5G4Aa8gKH_o&feature=youtu.be

Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la fonction dérivée de la fonction donnée :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + 4)e^x$

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x + 2}$

3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - 2e^x + 3e^{2x}$

4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 4 - 5e^{-2x+1}$

5. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 10 + 120e^{-0,1x+3}$

6. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 5)e^{-3x}$

Exercice 3 : https://www.youtube.com/watch?v=_MA1aW8ldjo&feature=youtu.be

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 3)e^x$ et soit C sa courbe représentative dans un repère.

- Déterminer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$ et justifier que $f'(x)$ est du signe de $2x - 1$ sur $\mathbb{R}$.
- Etablir le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 :

Le taux d'alcoolémie (en grammes par litre de sang) d'un homme de 70 kg après absorption de deux verres d'alcool à l'instant $x = 0$ est donné, en fonction du temps x (en heures), par la fonction f définie sur $I = [0 ; 4]$ par $f(x) = 3x e^{-1,25x}$.

- En utilisant le fait que f est de la forme $u \times v$, démontrer que :
 $\forall x \in I, f'(x) = (3 - 3,75x)e^{-1,25x}$.
- Etablir le tableau de variation de f sur I .
- En déduire le nombre de minutes au bout duquel le taux d'alcool est maximal.

QCM : <http://maths-master.fr/liste-qcm-e3c-premiere-generale-maths/>
 (« fonction exponentielle »)

Exercice 1 : <https://www.youtube.com/watch?v=JEL4hxtnw0Q&feature=youtu.be>

A la rentrée scolaire, on fait une enquête sur l'ensemble des classes de sixième d'un collège.

On a obtenu les résultats suivants :

	a un cartable	a un sac à dos	total
vient à pied	48	18	66
vient en voiture	27	9	36
vient en bus	33	15	48
total	108	42	150

On choisit au hasard un élève de sixième et on note les événements :

C : " l'élève a un cartable ", M : " l'élève vient à pied ", V : " l'élève vient en voiture " et B : " l'élève vient en bus "

1. Calculer les probabilités suivantes :

a. $p(V)$

b. $p_C(V)$

c. $p(C \cap V)$

d. $p_V(C)$

2. Calculer les probabilités des événements suivants :

a. l'élève a un sac à dos

b. l'élève vient en bus et a un sac à dos

c. l'élève qui a un sac à dos vient à pied

d. l'élève qui vient en voiture a un sac à dos

Exercice 2 : <https://www.youtube.com/watch?v=Pc5kJBkPDbo&feature=youtu.be>

<https://www.youtube.com/watch?v=qTpTBoZA7zY&feature=youtu.be>

Lors d'une enquête réalisée auprès de familles d'une région, concernant leur habitation principale, on apprend que 55 % des familles interrogées sont propriétaires de leur logement, 40 % en sont locataires et enfin 5 % occupent leur logement gratuitement (c'est-à-dire occupants à titre gratuit).

Toutes les familles interrogées habitent soit une maison individuelle, soit un appartement.

Toute habitation ne contient qu'une seule famille.

On apprend également que 60 % des propriétaires habitent une maison individuelle, 80 % des locataires habitent un appartement et enfin 10 % des occupants à titre gratuit habitent une maison individuelle.

On interroge au hasard une famille de la région et on considère les événements :

A : " La famille habite un appartement "

L : " La famille est locataire "

D : " La famille est propriétaire "

G : " La famille est occupant à titre gratuit "

1. Exprimer sans calcul et avec les notations de l'énoncé les 6 probabilités données.

2. Compléter l'arbre pondéré résumant la situation.

3. a. Calculer la probabilité de l'événement :

" La famille est propriétaire et habite un appartement ".

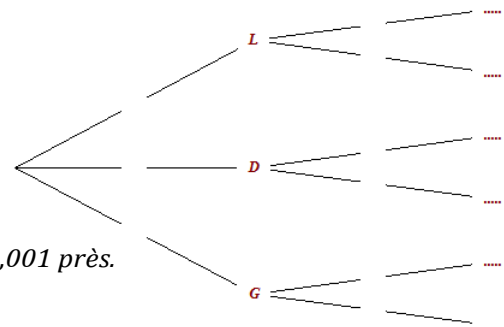
b. Montrer que $p(A) = 0,585$.

4. On interroge une famille qui habite un appartement.

Quelle est, à 0,001 près, la probabilité qu'elle en soit propriétaire ?

5. Calculer $p_{\bar{A}}(L)$ puis en donner une valeur approchée à 0,001 près.

En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.



Exercice 3 : https://www.youtube.com/watch?v=wDiMq_lTk1w&feature=youtu.be

<https://www.youtube.com/watch?v=yIvN6Dh-bDg&feature=youtu.be>

Dans une usine, une chaîne de production fabrique en série des pièces pour des moteurs électriques.

Des tests ont permis d'établir que 3 % des pièces présentaient un défaut mécanique et que 5 % des pièces présentaient un défaut électrique.

On choisit au hasard une pièce en bout de chaîne et on considère les événements :

M = " la pièce présente un défaut mécanique " et E = " la pièce présente un défaut électrique ".

Calculer la probabilité de l'événement " la pièce est défectueuse " dans chacun des cas suivants :

1. 1,2 % des pièces présentent les deux défauts.

2. Les événements M et E sont incompatibles.

3. Les événements M et E sont indépendants.

Exercice 4 : <https://www.youtube.com/watch?v=krbtyBDeRqQ&feature=youtu.be>

Après avoir misé, un joueur lance deux dés bien équilibrés et il gagne 50 € s'il obtient un "double 6", 13 € s'il obtient exactement un 6 mais il ne gagne rien dans tous les autres cas.

Dans cet exercice, les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. On note X la variable aléatoire donnant le gain du joueur sans tenir compte de la mise .

- Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X .
- Donner, sous la forme d'un tableau la loi de probabilité de X .
- Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de cette loi.
- Calculer l'écart type $\sigma(X)$ de cette loi.

2. On note m la mise du joueur ($m > 0$) et Y la variable aléatoire donnant le gain du joueur en tenant compte de la mise.

- Donner $Y(\Omega)$ en fonction de m puis exprimer Y en fonction de X et m .
- Quelle doit être la mise du joueur pour qu'en moyenne, l'organisateur du jeu puisse espérer gagner au moins 5 € par joueur ?

QCM : <http://maths-master.fr/liste-qcm-e3c-premiere-generale-maths/> ("probabilités")

Corrigé des exercices

I - Second degré

Exercice 1:

1. $2x^2 + 5x - 7 = 0$ (C'est une équation du second degré et on a $a = 2$; $b = 5$; $c = -7$)

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 2 \times (-7) = 81 \text{ donc } \Delta > 0$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-5 + \sqrt{81}}{2 \times 2} & &= \frac{-5 - \sqrt{81}}{2 \times 2} \\ &= \frac{4}{4} & &= -\frac{7}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{donc } S = \left\{ 1; -\frac{7}{2} \right\}$$

$$2. \quad 25x^2 + 30x + 9 = 0 \iff (5x)^2 + 2 \times 5x \times 3 + 3^2 = 0 \iff (5x + 3)^2 = 0$$

$$\iff 5x + 3 = 0$$

$$\iff x = -\frac{3}{5} \text{ donc } S = \left\{ -\frac{3}{5} \right\}$$

Remarque : si on ne voit pas la factorisation, on peut bien sûr calculer Δ qui vaut ici 0 et on retrouve que l'équation a

$$\text{une unique solution : } x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{2 \times 25} = -\frac{3}{5}$$

$$3. \quad 3x^2 + x + 5 = 2x^2 + 4 \iff 3x^2 + x + 5 - 2x^2 - 4 = 0 \iff x^2 + x + 1 = 0$$

$$(a = 1; b = 1; c = 1)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 \text{ donc } \Delta < 0$$

$$\text{D'où } S = \emptyset$$

Exercice 2:

A vous de détailler le calcul de Δ et des racines

$$1. \quad -2x^2 + 5x - 3 \leq 0$$

Avec les formules du cours, on trouve $\Delta = 1$; $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2 + 5x - 3$		-	0	+	0	-	

$$a = -2; a < 0$$

Rappel : le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines et de $-a$ entre les racines.

$$\text{Donc } S =]-\infty; 1] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$$

$$2. \quad \frac{5x^2 - 4x + 12}{5 - 3x} > 0$$

$$\bullet \quad 5x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$\Delta = -224 \text{ donc } \Delta < 0. \text{ Or } a = 5 \text{ donc } a > 0.$$

D'où $5x^2 - 4x + 12$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

$$\bullet \quad 5 - 3x = 0 \iff 5 = 3x \iff \frac{5}{3} = x \quad \left(\frac{5}{3} \text{ est une VI}\right)$$

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$5x^2 - 4x + 12$		+		+	
$5 - 3x$		+	0	-	
$\frac{5x^2 - 4x + 12}{5 - 3x}$		+		-	

$$\text{donc } S = \left] -\infty; \frac{5}{3} \right[$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \frac{2x^2 - 12x - 17}{4 - x} \leq 1 &\iff \frac{2x^2 - 12x - 17}{4 - x} - \frac{4 - x}{4 - x} \leq 0 \iff \frac{2x^2 - 12x - 17 - (4 - x)}{4 - x} \leq 0 \\ &\iff \frac{2x^2 - 12x - 17 - 4 + x}{4 - x} \leq 0 \\ &\iff \frac{2x^2 - 11x - 21}{4 - x} \leq 0 \end{aligned}$$

$$\bullet 2x^2 - 11x - 21 = 0$$

$$\Delta = 289$$

$$x_1 = -\frac{3}{2} \text{ et } x_2 = 7$$

$$\bullet 4 - x = 0 \iff 4 = x$$

4 est une V.I.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	4	7	$+\infty$	
$2x^2 - 11x - 21$	+	0	-	-	0	+
$4 - x$	+	+	0	-	-	-
$\frac{2x^2 - 11x - 21}{4 - x}$	+	0	-	+	0	-

$$a = 2; a > 0$$

$$S = \left[-\frac{3}{2}; 4\right[\cup [7; +\infty[$$

Exercice 3:

$$\begin{aligned} \text{Pour tout réel } x, \quad f(x) - g(x) &= x^2 + 2x - (-2x^2 - 3x + 2) \\ &= x^2 + 2x + 2x^2 + 3x - 2 \\ &= 3x^2 + 5x - 2 \end{aligned}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 49 \quad \text{donc} \quad \Delta > 0$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \times 3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

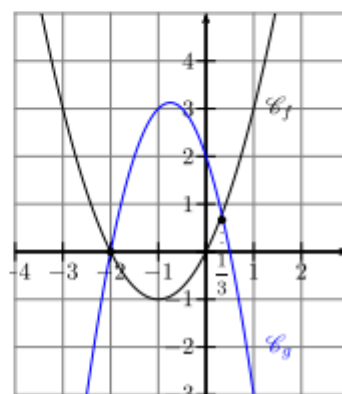
$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \times 3} \\ &= -2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
$3x^2 + 5x - 2$	+	0	-	0	+

$$a > 0$$

- Pour $x \in]-\infty; -2[\cup]\frac{1}{3}; +\infty[$, $f(x) - g(x) > 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est strictement au dessus de $\mathcal{C}_g$.
- Pour $x \in]-2; \frac{1}{3}[$, $f(x) - g(x) < 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est strictement en dessous de $\mathcal{C}_g$.
- Pour $x \in \left\{-2; \frac{1}{3}\right\}$, $f(x) - g(x) = 0$ donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont sécantes.

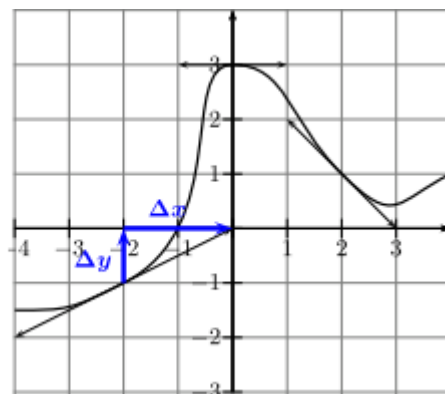
On peut vérifier graphiquement avec les représentations graphiques de f et g données ci-contre.



II - Dérivation et applications

Exercice 1:

1. $f(-2) = -1$; $f(0) = 3$ et $f(2) = 1$.
2. $f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -2 donc $f'(-2) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$.
De même, on trouve $f'(0) = 0$ (tangente horizontale au point d'abscisse 0) et $f'(2) = -1$.
3. T_2 a pour équation $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$
ce qui donne : $y = -(x - 2) + 1$ soit encore $y = -x + 3$



Exercice 2:

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 2$.
 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x , $f'(x) = 4 \times 3x^2 - 3 \times 2x + 4 = 12x^2 - 6x + 4$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 - 2x + \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}$
 f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = 2x - 2 + 5 \times \frac{-1}{x^2} + 2 \times \frac{-2}{x^3} = 2x - 2 - \frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^3}$

3. f est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 3 - 8\sqrt{x}$.
 f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = 0 - 8 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{4}{\sqrt{x}}$

4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 8x - 5e^x$.
 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x , $f'(x) = -2 \times 2x + 8 - 5e^x = -4x + 8 - 5e^x$

Exercice 3:

1. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = (4x + 1)\sqrt{x}$.
 $f = u \times v$ avec $u(x) = 4x + 1$, $u'(x) = 4$, $v(x) = \sqrt{x}$ et $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f' = u' \times v + u \times v'$
Soit pour tout $x > 0$, $f'(x) = 4\sqrt{x} + (4x + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + 4x + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{8x + 4x + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{12x + 1}{2\sqrt{x}}$

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-5x^2 + 3x - 7)^2$
 $f = u^2$ avec $u(x) = -5x^2 + 3x - 7$ et $u'(x) = -5 \times 2x + 3 = -10x + 3$
donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 2u \times u'$
soit pour tout x , $f'(x) = 2(-5x^2 + 3x - 7)(-10x + 3)$

3. f est définie sur $]5; +\infty[$ par $f(x) = \frac{8x+3}{x-5}$
 $f = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = 8x + 3$, $u'(x) = 8$, $v(x) = x - 5$ et $v'(x) = 1$
donc f est dérivable sur $]5; +\infty[$ et $f' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
soit pour tout $x > 5$, $f'(x) = \frac{8(x-5) - (8x+3) \times 1}{(x-5)^2} = \frac{8x - 40 - 8x - 3}{(x-5)^2} = \frac{-43}{(x-5)^2}$

4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x - 2)^4$
 $f(x) = g(ax + b)$ avec $g(x) = x^4$, $g'(x) = 4x^3$ et $a = 3$
donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = g'(ax + b) \times a = 4(3x - 2)^3 \times 3 = 12(3x - 2)^3$

Exercice 4:

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -0,5 \times 3x^2 + 6,75 \times 2x - 21 \times 1 + 0 = \boxed{-1,5x^2 + 13,5x - 21}$.

$$-1,5x^2 + 13,5x - 21 = 0$$

$$\Delta = 13,5^2 - 4(-1,5)(-21) = 56,25$$

$$x_1 = \frac{-13,5 - \sqrt{56,25}}{2(-1,5)} = 7 \quad x_2 = \frac{-13,5 + \sqrt{56,25}}{2(-1,5)} = 2$$

x	$-\infty$	2	7	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		16	$47,25$		

$a = -1,5$; $a < 0$

$$f(2) = -0,5 \times 2^3 + 6,75 \times 2^2 - 21 \times 2 + 3 = 16$$

$$f(7) = -0,5 \times 7^3 + 6,75 \times 7^2 - 21 \times 7 + 3 = 47,25$$

2. $g(x) = 2x - \frac{3}{x} = 2x - 3 \times \frac{1}{x}$.

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $g'(x) = 2 \times 1 - 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \boxed{2 + \frac{3}{x^2}}$ (la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R} - \{0\}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$)

Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$ donc $\frac{3}{x^2} > 0$ d'où $2 + \frac{3}{x^2} > 2 > 0$ et donc $f'(x) > 0$. On en déduit que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		

Exercice 5:

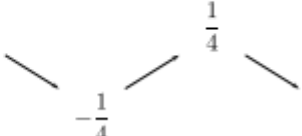
1. $f = \frac{u}{v}$ donc $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = x^2 + 4$
 $u'(x) = 1$ $v'(x) = 2x$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1(x^2 + 4) - x \times 2x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{-x^2 + 4}{(x^2 + 4)^2}$$

2. On étudie le signe de $f'(x)$:

$$\bullet -x^2 + 4 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = 2 \text{ ou } x = -2$$

$$\bullet x^2 + 4 = 0 \iff x^2 = -4 \quad \text{pas de solution dans } \mathbb{R} \text{ et on a : } \forall x \in \mathbb{R}, (x^2 + 4)^2 > 0$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$-x^2 + 4$	$-$	0	$+$	0	$-$
$(x^2 + 4)^2$	$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$					

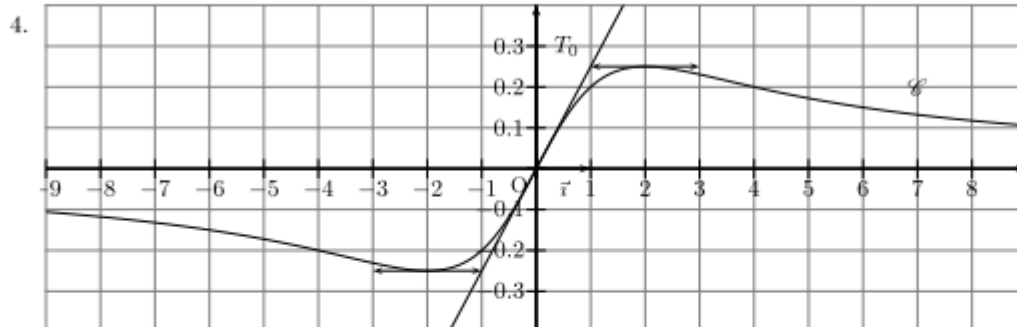
$$f(-2) = \frac{-2}{4+4} = -\frac{1}{4} \text{ et } f(2) = \frac{2}{2^2+4} = \frac{1}{4}$$

$$a = -1, a < 0$$

Remarque : une fois qu'on a écrit que $(x^2 + 4)^2 > 0$, on peut aussi en déduire que $f'(x)$ est du signe de $-x^2 + 4$ et on peut alors éliminer les deux premières lignes de signe du tableau pour donner directement le signe de $f'(x)$.

3. La tangente T_0 à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 admet pour équation : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

$$\text{Or } f'(0) = \frac{0^2 + 4}{(0^2 + 4)^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \text{ et } f(0) = \frac{0}{0^2 + 4} = 0 \text{ donc } T_0 : y = \frac{1}{4}x.$$



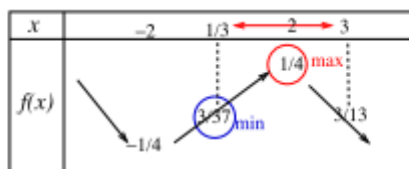
5. $\bullet f(4) = \frac{1}{5}$ et $f(-4) = -\frac{1}{5}$

conseil : reporter ces valeurs dans le tableau de variation de f pour repérer le maximum et le minimum de f sur cet intervalle (ne pas réécrire un tableau, utiliser celui que vous avez établi au dessus) :

x	-4	-2	2	4
$f(x)$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$ min	$\frac{1}{4}$ max	$\frac{1}{5}$

Sur $[-4; 4]$, le minimum de f est $-\frac{1}{4}$ et son maximum $\frac{1}{4}$ donc pour tout $x \in [-4; 4]$, on a $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$.

- $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{37}$ et $f(3) = \frac{3}{13}$. Même conseil que ci-dessus.



Sur $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$, le minimum de f est $\frac{3}{37}$ et son maximum $\frac{1}{4}$ donc pour tout $x \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$, on a $\frac{3}{37} \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$.

III - Suites numériques

Exercice 1:

1. $u_n = \frac{3n}{n^2 + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
donc $u_0 = \frac{3 \times 0}{0^2 + 1} = 0$; $u_1 = \frac{3 \times 1}{1^2 + 1} = \frac{3}{2}$; $u_2 = \frac{3 \times 2}{2^2 + 1} = \frac{6}{5}$
2. $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -2u_n^2 + 7$.
 $u_0 = -2$; $u_1 = -2u_0^2 + 7 = -2(-2)^2 + 7 = -1$; $u_2 = -2u_1^2 + 7 = -2(-1)^2 + 7 = 5$.

Exercice 2:

1. • $u_0 = 0$; $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 3 = 3$ et $u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 3 = 8$ (la suite semble croissante).

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_{n+1} - u_n} = u_n + 2n + 3 - u_n = \boxed{2n + 3}$$

Or $n \geq 0$ donc $2n \geq 0$ d'où $2n + 3 \geq 3 > 0$. On a donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et on en déduit que (u_n) est croissante.

2. • $u_0 = 1$; $u_1 = 8$ et $u_2 = 17$ (la suite semble croissante)

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_{n+1} - u_n} = (n+1)^2 + 6(n+1) + 1 - (n^2 + 6n + 1) = n^2 + 2n + 1 + 6n + 6 + 1 - n^2 - 6n - 1 = \boxed{2n + 7}$$

Or $n \geq 0$ donc $2n \geq 0$ d'où $2n + 7 \geq 7 > 0$. On a donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et on en déduit que (u_n) est croissante.

3. (u_n) est définie par $u_n = (-1)^n$.

$$\bullet u_0 = (-1)^0 = 1 ; u_1 = (-1)^1 = -1 \text{ et } u_2 = (-1)^2 = 1 \text{ donc } u_0 > u_1 \text{ mais } u_1 < u_2.$$

- Plus généralement, si n est pair, $u_n = 1$ et si n est impair, $u_n = -1$

La suite n'est donc pas monotone

Exercice 3:

Soit (u_n) la suite arithmétique de 1er terme $u_0 = 8$ et de raison $r = 3$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr = \boxed{8 + 3n}$.

$$2. u_{50} = 8 + 3 \times 50 = \boxed{158}$$

3. $u_n > 1000 \iff 8 + 3n > 1000 \iff 3n > 992 \iff n > \frac{992}{3}$
or $\frac{992}{3} \approx 330,7$ donc le plus petit entier n tel que $u_n > 1000$ est 331.

4. A l'avant dernière ligne, on a « u prend la valeur u+3 » car :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$ (relation de récurrence pour une suite arithmétique de raison 3) mais on pourrait aussi écrire « u prend la valeur $8+3n$ » en utilisant l'expression de la question 1.

```
def seuil() :
    u=8
    n=0
    while u ≤ 1000 :
        n=n+1
        u=u+3
    return(n)
```

Exercice 4:

Soit (u_n) la suite géométrique de 1er terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = \boxed{3 \times 2^n}$.

$$2. u_9 = 3 \times 2^9 = \boxed{1536}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad S &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_9 \\
&= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + \dots + u_0 \times q^9 \\
&= u_0(1 + q + q^2 + \dots + q^9) \\
&= u_0 \times \frac{1 - q^{10}}{1 - q} \quad (\text{si vous connaissez cette formule, vous pouvez l'écrire dès le début}) \\
&= 3 \times \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} \\
&= 3(2^{10} - 1) \\
&= \boxed{3069}
\end{aligned}$$

IV - Fonction exponentielle

Exercice 1 :

$$\begin{aligned}
1. \quad a) \quad e^5 \times e^{-3} &= e^{5+(-3)} = \boxed{e^2} & b) \quad \frac{e^4}{e^6} &= e^{4-6} = \boxed{e^{-2}} & c) \quad \frac{(e^3)^2}{e^{-6}} &= \frac{e^{3 \times 2}}{e^{-6}} = e^{6-(-6)} = \boxed{e^{12}} \\
2. \quad a) \quad e^{3x+1} &= e^4 \iff 3x+1=4 \iff 3x=3 \iff x=1 & \boxed{S=\{1\}} \\
b) \quad e^{3x+4} &< e \iff e^{3x+4} < e^1 \iff 3x+4 < 1 \iff 3x < -3 \iff x < -1 & \boxed{S=]-\infty; -1[} \\
c) \quad e^{4x^2} &= e^{5x} \iff 4x^2 = 5x \iff 4x^2 - 5x = 0 \iff x(4x-5) = 0 \iff x=0 \text{ ou } 4x-5=0 \iff x=0 \text{ ou } x=\frac{5}{4} \\
&\boxed{S=\left\{0; \frac{5}{4}\right\}}
\end{aligned}$$

Exercice 2 :

$$\begin{aligned}
1. \quad f &\text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = (x^2 + 4)e^x \\
f &= u \times v \text{ avec } u(x) = x^2 + 4, u'(x) = 2x, v(x) = e^x \text{ et } v'(x) = e^x \\
\text{donc } f &\text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f' = u' \times v + u \times v' \\
\text{soit pour tout } x, \quad f'(x) &= 2x \times e^x + (x^2 + 4) \times e^x = (x^2 + 2x + 4)e^x \\
2. \quad f &\text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = \frac{e^x + x}{e^x + 2} \\
f &= \frac{u}{v} \text{ avec } u(x) = e^x + x, u'(x) = e^x + 1, v(x) = e^x + 2 \text{ et } v'(x) = e^x \\
\text{donc } f &\text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2} \\
\text{soit pour tout } x, \quad f'(x) &= \frac{(e^x + 1)(e^x + 2) - (e^x + x)e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{(e^x)^2 + e^x + 2e^x + 2 - (e^x)^2 - xe^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{(3-x)e^x + 2}{(e^x + 2)^2} \\
3. \quad f &\text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = 1 - 2e^x + 3e^{2x} \\
f &\text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(x) = 0 - 2e^x + 3e^{2x} \times 2 = -2e^x + 6e^{2x} \quad \text{car } (e^{ax})' = e^{ax} \times a \\
4. \quad f &\text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = x + 4 - 5e^{-2x+1} \\
f &\text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(x) = 1 - 5e^{-2x+1} \times (-2) = 1 + 10e^{-2x+1} \quad \text{car } (e^{ax+b})' = e^{ax+b} \times a \\
5. \quad f &\text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = 10 + 120e^{-0,1x+3} \\
f &\text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(x) = 0 + 120e^{-0,1x+3} \times (-0,1) = -12e^{-0,1x+3} \\
6. \quad f &\text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ par } f(x) = (2x + 5)e^{-3x} \\
f &= u \times v \text{ avec } u(x) = 2x + 5, u'(x) = 2, v(x) = e^{-3x} \text{ et } v'(x) = e^{-3x} \times (-3) \quad \text{car } (e^{ax})' = e^{ax} \times a \\
\text{donc } f &\text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } f' = u' \times v + u \times v' \\
\text{soit pour tout } x, \quad f'(x) &= 2 \times e^{-3x} + (2x + 5) \times (-3e^{-3x}) = (2 - 6x - 15)e^{-3x} = (-6x - 13)e^{-3x}
\end{aligned}$$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 3)e^x$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère.

$$\begin{aligned}
1. \quad f &= u \times v \text{ donc } f' = u'v + uv' \text{ avec } u(x) = 2x - 3 \text{ et } v(x) = e^x \\
&\quad u'(x) = 2 \quad v'(x) = e^x \\
\text{D'où } \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= 2e^x + (2x - 3)e^x = e^x(2 + 2x - 3) = \boxed{e^x(2x - 1)} \\
\text{Or } \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x &> 0 \text{ donc } \underline{f'(x) \text{ est du signe de } 2x - 1}.
\end{aligned}$$

$$2. 2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\swarrow$ $-2e^{1/2}$ $\searrow$		

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2 \times \frac{1}{2} - 3\right) e^{\frac{1}{2}} = -2e^{\frac{1}{2}}$$

Exercice 4 :

1. $f = u \times v$ donc $f' = u'v + uv'$ avec $u(x) = 3x$ et $v(x) = e^{-1,25x}$
 $u'(x) = 3$ $v'(x) = -1,25 e^{-1,25x}$ (la dérivée de $x \mapsto e^{ax+b}$ est $x \mapsto ae^{ax+b}$)

$$\begin{aligned} \text{D'où } \forall x \in I, f'(x) &= 3e^{-1,25x} + 3x \times (-1,25) e^{-1,25x} = (3 + 3x \times (-1,25)) e^{-1,25x} \\ &= (3 - 3,75x) e^{-1,25x} \end{aligned}$$

2. • $\forall x \in I, e^{-1,25x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $3 - 3,75x$.

$$\bullet 3 - 3,75x = 0 \iff x = \frac{3}{3,75} \iff x = 0,8$$

x	0	$0,8$	4
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$2,4e^{-1}$	$12e^{-5}$

$$f(0) = 3 \times 0e^0 = 0$$

$$f(0,8) = 3 \times 0,8e^{-1,25 \times 0,8} = 2,4e^{-1}$$

$$f(4) = 3 \times 4e^{-1,25 \times 4} = 12e^{-5}$$

3. Le taux est donc maximal au bout de 0,8 heures c'est-à-dire au bout de 48 min (car $0,8 \times 60 = 48$)

V - Probabilités

Exercice 1 :

- $p(V) = \frac{36}{150} = 0,24$
 - $p_C(V) = \frac{27}{108} = 0,25$
 - $p(C \cap V) = \frac{27}{150} = 0,18$
 - $p_V(C) = \frac{27}{36} = 0,75$
- l'élève a un sac à dos : $p(\bar{C}) = \frac{42}{150} = 0,28$
 - l'élève vient en bus et a un sac à dos : $p(B \cap \bar{C}) = \frac{15}{150} = 0,1$
 - l'élève qui a un sac à dos vient à pied : $p_{\bar{C}}(M) = \frac{18}{42} \approx 0,429$
 - l'élève qui vient en bus a un sac à dos : $p_B(\bar{C}) = \frac{15}{48} = 0,3125$

Exercice 2 :

1. L'énoncé donne : $p(D) = 0,55$; $p(L) = 0,4$; $p(G) = 0,05$
 $p_D(\bar{A}) = 0,6$; $p_L(A) = 0,8$ et $p_G(\bar{A}) = 0,1$

2. On obtient l'arbre pondéré ci-contre :

3. a. On cherche : $p(A \cap D) = 0,4 \times 0,55 = 0,22$

donc la probabilité que la famille soit propriétaire et habite un appartement est égale à 0,22.

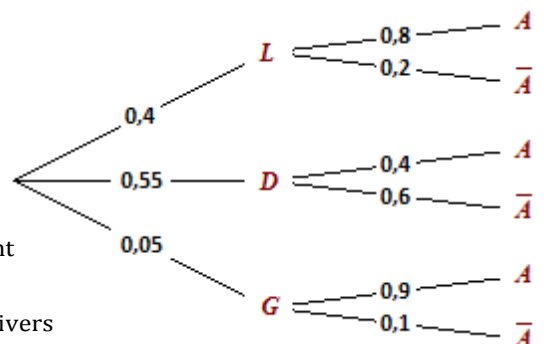
- b. Les événements L, D et G forment une partition de l'univers

donc d'après la formule des probabilités totales, on a : $p(A) = p(A \cap D) + p(A \cap L) + p(A \cap G)$
 $= 0,4 \times 0,8 + 0,22 + 0,05 \times 0,9 = 0,585$

donc la probabilité que la famille habite un appartement est égale à 0,585.

4. On cherche : $p_A(D) = \frac{p(A \cap D)}{p(A)} = \frac{0,22}{0,585} \approx 0,376$

donc la probabilité qu'une famille habitant un appartement en soit propriétaire est environ 0,376.



$$5. \text{ On a : } p_{\bar{A}}(L) = \frac{p(\bar{A} \cap L)}{p(\bar{A})}$$

or, $p(\bar{A} \cap L) = 0,4 \times 0,2 = 0,08$ et $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0,585 = 0,415$

$$\text{donc } p_{\bar{A}}(L) = \frac{0,08}{0,415} \approx 0,193$$

donc la probabilité qu'une famille habitant une maison en soit locataire est environ 0,193.

Exercice 3 : On a $p(M) = 0,03$, $p(E) = 0,05$ et on cherche $p(M \cup E)$

1. L'énoncé donne : $p(M \cap E) = 0,012$

$$\text{donc } p(M \cup E) = p(M) + p(E) - p(M \cap E) = 0,03 + 0,05 - 0,012 = 0,068$$

2. On a : $p(M \cap E) = 0$ car M et E sont incompatibles,

$$\text{donc } p(M \cup E) = p(M) + p(E) = 0,03 + 0,05 = 0,08$$

3) On a : $p(M \cap E) = p(M) \times p(E) = 0,03 \times 0,05 = 0,0015$ car M et E sont indépendants,

$$\text{donc } p(M \cup E) = p(M) + p(E) - p(M \cap E) = 0,03 + 0,05 - 0,0015 = 0,0785$$

Exercice 4 :

1) a. On a : $X(\Omega) = \{0; 13; 50\}$

b. On peut obtenir les 36 gains suivants :

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	13
2	0	0	0	0	0	13
3	0	0	0	0	0	13
4	0	0	0	0	0	13
5	0	0	0	0	0	13
6	13	13	13	13	13	50

L'univers Ω est l'ensemble des 36 tirages possibles et la loi sur Ω est équirépartie,

d'où la loi de probabilité de X :

x_i	0	13	50
$p_i = p(X = x_i)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$	$\frac{1}{36}$

$$\sum p_i = 1$$

$$c. E(X) = \sum p_i \times x_i = \frac{25}{36} \times 0 + \frac{10}{36} \times 13 + \frac{1}{36} \times 50 = 5$$

$$d. V(X) = \sum p_i \times (x_i)^2 - (E(X))^2 = \frac{25}{36} \times 0^2 + \frac{10}{36} \times 13^2 + \frac{1}{36} \times 50^2 - 5^2 = \frac{1645}{18}$$

$$\text{donc } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1645}{18}} \approx 9,56$$

2. a. Le joueur perd sa mise donc : $Y(\Omega) = \{-m; 13 - m; 50 - m\}$

donc on obtient : $Y = X - m$

b. Pour que l'organisateur gagne en moyenne au moins 5 € par joueur, il faut que chaque joueur perde en moyenne au moins 5 € par partie donc il faut l'espérance de gain du joueur soit inférieure ou égale à -5 € soit $E(Y) \leq -5$.

On a : $Y = X - m$ donc $E(Y) = E(X) - m$

$$\text{d'où } E(Y) \leq -5 \Leftrightarrow 5 - m \leq -5 \Leftrightarrow m \geq 10$$

L'organisateur doit donc fixer une mise d'au moins 10 € pour espérer gagner en moyenne 5 € par joueur.